



FICHA DE TRABAJO N°15

MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

SUMA DE SUCECIONES

Como una sucesión es una serie de términos numéricos, podríamos preguntarnos si se puede establecer una suma de estos términos. Un Clásico ejemplo de esto es la Historia que se cuenta sobre Gauss. Según cuenta la historia el profesor de Gauus les dio a sus estudiantes la tarea de sumar los números 1 al 100, Gauss (que tenía 7 años) pudo resolver el problema inmediatamente. Aunque esta historia se basa en que Gauus era un genio de la matemática a corta edad, la historia no tiene ninguna referencia verídica, por lo que muchos piensan que es un cuento.

Pese a ello ¿Es posible establecer una fórmula para sumar los primeros 100 números de manera sencilla? La respuesta es sí, es posible, a partir de las fórmulas de regularidad se puede establecer un proceso para encontrar la e-nésima suma. En clase veremos cómo llegar a cada una de las fórmulas.

SUMA DE UNA SUCECIÓN ARITMETICA

En el caso de una sucesión aritmética, la fórmula que describe la suma de los primero enésimos términos es la siguiente.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética, se define $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ como la suma de los n primeros términos de la sucesión. Donde

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Por ejemplo: en la suma planteada al principio podemos crear una sucesión que represente los números naturales, pues sabemos que $d = 1$ mientras que $a_1 = 1$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1$$

$$a_n = n$$

Ahora podemos encontrar la suma de los primeros 100 números de la sucesión aplicando la fórmula vista.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

En nuestro caso $a_1 = 1$ mientras que $a_{100} = 100$, por lo que la fórmula queda de la siguiente manera.

$$S_{100} = \frac{100(a_1 + a_{100})}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100(1 + 100)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100(101)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Como vemos la fórmula es una manera sencilla de encontrar una suma n-ésima.

Actividad: Calcula las siguientes sumas de sucesiones aritméticas.

1. Encuentre la suma de los primeros 40 términos de aritmética de $2+5+8+11+\dots$
2. El término e-nesimo de una sucesión es $a_n = 3n + 2$. Encuentra la suma de los primeros 50 términos.
3. Una sucesión aritmética tiene como primer término el número 4 Mientras que el término 78 es el número 456. ¿Cuál será la suma de los primeros 78° términos?
4. Encuentra la suma de la sucesión aritmética $1,3,5,7,\dots,199$

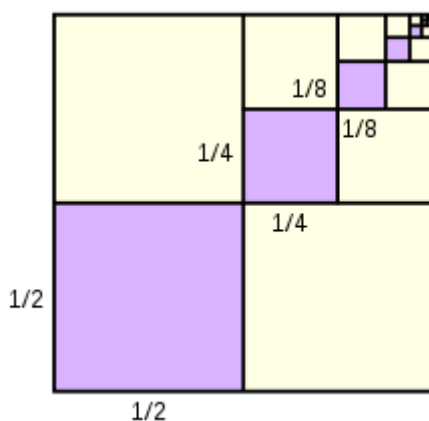
SUMA DE SUCESIONES GEOMÉTRICAS

En el caso de las sucesiones geométricas también podemos establecer una suma que permita determinar el valor de una suma.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica, se define $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ como la suma de los n primeros términos de la sucesión. Donde

$$S_n = \frac{a_n r^n - a_1}{r - 1}$$

Ejemplo: En un cuadrado de lado 10 cm se divide en 4 partes iguales y se elige uno de los cuadros que se formaron para pintarlo. Luego se elige otro cuadrado vacío y se divide en 4 y se pinta y así sucesivamente. Determina el área de la figura formada al repetir el proceso 10 veces.



Podemos primero encontrar la sucesión geométrica que modela el área de cada cuadrado

$$\{a_n\} = \frac{10}{4}, \frac{10}{16}, \dots, \frac{10}{4^n}$$

Actividad: Calcula las siguientes sumas de sucesiones geométricas.

1. Encuentra la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $\frac{8}{10}, \frac{8}{100}, \frac{8}{1000}, \dots$
2. Encuentra la suma de los primeros n términos de la secuencia 12,132,1332,13332, ...
3. En la secuencia 0,7;0,77;0,777 Encuentra la suma de los primeros n términos.
4. Con la progresión geométrica 625,125,25 encuentra el sexto término y la suma de los primeros 15 términos.
5. En la progresión geométrica $\frac{5}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{-5}{24}$ determina la suma de los primeros 5 términos.



FICHA DE TRABAJO N°16
MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

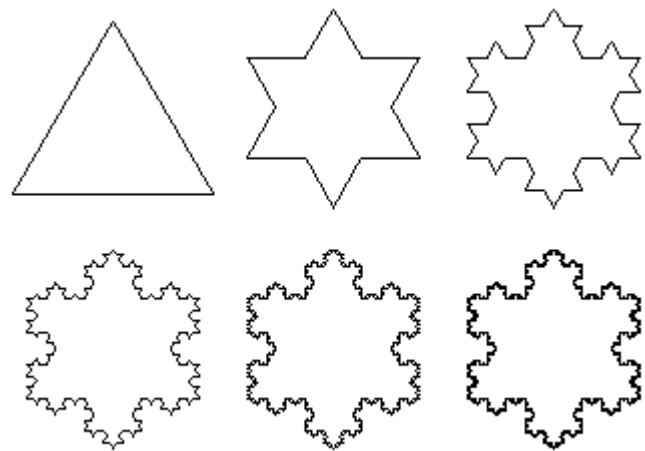
CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Los griegos, no solo desarrollaron la geometría matemática, sino que también sus ideas inspiraron los conocimientos que se alcanzarían mas adelante. Un ejemplo de esto es por ejemplo el átomo, que se comprobó siglos mas tarde. Otro ejemplo, son las paradojas de Zenón.

Zenón pensó en un arquero que lanza una flecha, hacia un árbol. Según Zenón la flecha usaba cierta cantidad de tiempo para recorrer la mitad de la distancia entre el arquero y el árbol. Luego usaba otra cantidad de tiempo para recorrer la otra mitad que faltaba, y así con cada sección restante. Zenón decía que como siempre se podrá encontrar la mitad entre dos valores, la flecha recorrerá infinitas veces esas medias distancias, y por lo tanto nunca llegará al árbol, lo que significa que el movimiento no debería existir.

Sabemos que Zenón no esta en lo cierto, pues el movimiento si existe y la flecha en algún momento golpeará el árbol, pero si nos ayuda a pensar en el infinito y sus repercusiones.

Otro ejemplo la siguiente figura llamada copo de Koch.



Básicamente, a cada lado se le agregan dos líneas extras, y el proceso se repite repetidamente. Lo interesante de esta figura es que, si repetimos el proceso hasta el infinito, claramente tendremos un perímetro infinito. Pero pese a que tiene infinitos lados e infinito perímetro su área será finita. Es interesante que pese a repetir un suceso de manera infinita, llegamos un valor finito.

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es convergente a L se define

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Para entenderlo un poco, podemos decir que una sucesión se acerca a cierto valor dado.

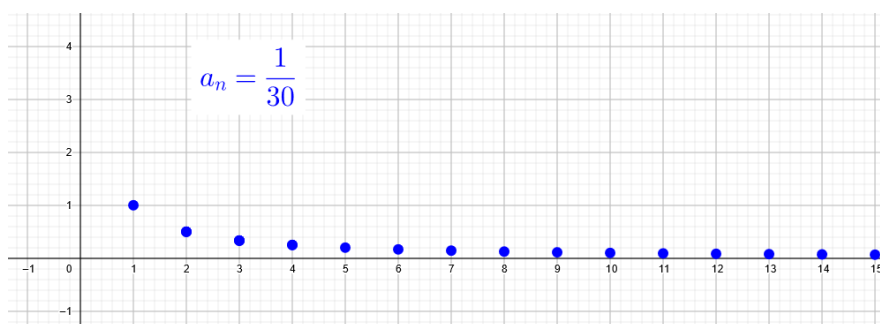
Ejemplo: Pensemos en la siguiente sucesión

$$a_n = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$$

Si nos damos cuenta, cada elemento está disminuyendo su valor. Podemos calcular distintos valores, por ejemplo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

En este caso a medida que aumenta el valor de n hacia el infinito podemos darnos cuenta de que se volverá un número tan pequeño tenderá a cero. Podemos ver lo mediante un gráfico.



Vemos como los valores se acercan a cero. Aunque la función nunca será cero, tiene a ese valor.

PROPIEDADES DEL LIMITE

Si tenemos las sucesiones a_n y b_n cuyos límites existen, es decir, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$, se cumplen las siguientes propiedades.

- a) El límite de una constante es su constante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

- b) El límite de una constante que multiplica una sucesión es igual al límite por la constante.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \cdot L_1$$

El límite de la suma o resta de dos sucesiones es la suma o resta de sus límites.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$$

- c) El límite de la multiplicación de dos sucesiones es la multiplicación de sus límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$$

- d) El límite de la división de dos sucesiones, es la división de sus límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$$

Actividad: Resuelve los siguientes límites de sucesiones

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n} \right)$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^2} + 6$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 6n$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \left(\frac{3}{n} - 7 \right)$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{e}{n}}{\frac{n}{n^3}} \right)$



FICHA DE TRABAJO N°17

MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

CALCULO DE LIMITES

Veremos el calculo de 3 casos particulares

CASO 1: SUMA DE UNA SUCESIÓN GEOMETRICA

La suma de una sucesión geométrica S_n , cuando $|r| < 1$ se puede determinar el limite de esa función mediante la siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Lo importante de este tipo de suma de sucesiones **solo obtendremos un límite si el valor de $|r| < 1$** . Por eso es importante determinar el valor de r pues de no cumplir con esa condición diremos la sucesión diverge.

Ejemplo: Sea S_n la suma de todos los términos de la sucesión $\{a_n\} = \left\{8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \frac{8}{24} \dots\right\}$ Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

En este ejemplo debemos primero encontrar r que sabemos que es $\frac{1}{3}$, lo que significa que se puede encontrar el límite de esta suma.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{8}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{8}{\frac{2}{3}} = \frac{24}{2} = 12 \end{aligned}$$

Es decir, la suma infinita de los términos de la sucesión es igual a 12.

Veamos otro ejemplo:

Calcula suma infinita de la siguiente sucesión geométrica. $S_n = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{9}{7} + \dots$

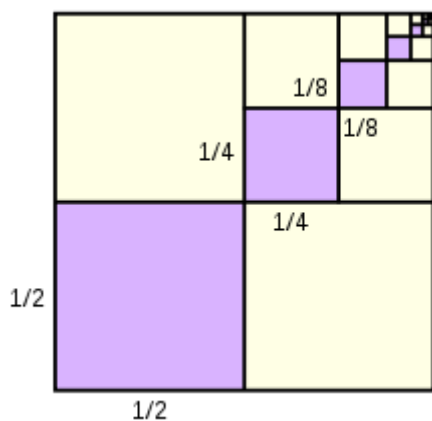
Primero calculamos el valor de r en el que basta dividir un término con el anterior. En nuestro caso tomaremos el tercer y segundo término.

$$\frac{\frac{9}{7}}{\frac{6}{7}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Como $\frac{3}{2} > 1$ entonces decimos la sucesión diverge.

Actividad: Resuelve las siguientes actividades

1. Encuentra la suma infinita de la sucesión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{-8}{81}, \dots$
2. Encuentra suma infinita de la sucesión cuyo término n -ésimo es $\frac{2}{3}$.
3. Determina la suma infinita de la progresión geométrica cuyo término n -ésimo $\frac{(-3)^n + 5^n}{7^n}$ (aplica las propiedades de límites)
4. Calcula el área total del área pintada en este cuadrado sabiendo que el lado del cuadrado principal es de 10 cm, y el proceso de dividir y pintar cada cuadrado se repite de manera indefinida.



5. Demuestra que $0,3333\dots$ es $\frac{1}{3}$ usando la suma de sucesiones geométricas.



FICHA DE TRABAJO N°18
MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

CASO 2: POLINOMIOS

Un polinomio se define como una serie de términos algebraicos de igual incógnita con distintos coeficientes.

Ejemplo: $P(x) = n^3 + 3n^2 - 7n + 3$

Se define el grado de un polinomio del exponente mayor. Usando el ejemplo anterior tendríamos que el grado del polinomio será 3, es decir $gr(P(x)) = 3$

Con esto presente se puede concluir lo siguiente:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales, se cumple en que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$$

- a) Si $gr(P(x)) = gr(Q(x))$ entonces el límite es un número.
- b) Si $gr(P(x)) \geq gr(Q(x))$ entonces el límite es ∞ .
- c) Si $gr(P(x)) \leq gr(Q(x))$ entonces el límite es 0.

Si vemos que el limite es un número, entonces podemos dividir cada termino por un monomio sin coeficientes a cada uno de los términos de la sucesión resultantes.

Ejemplo 1: Calcula el límite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3 - 4}{4n^2 + 7n + 9} \right)$$

En este caso nos damos cuenta de que el grado del numerador es mayor que el del denominador, por lo que el límite no se puede calcular y la sucesión tiende a infinito.

Ejemplo 2: Calcula el límite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n^2 + 5n - 1}{10n^2 - 5} \right)$$

Como el grado de ambos polinomios es el mismo, podemos dividir todos los términos por un monomio de ese grado.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n^2 + 5n - 1}{10n^2 - 5} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-2n^2}{n^2} + \frac{5n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{10n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}} \right) \end{aligned}$$

Simplificamos los términos que podemos.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2 + \frac{5n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{10 - \frac{5}{n^2}} \right)$$

Aplicamos el límite con lo que tenemos.

$$\begin{aligned} &= \frac{-2 + 0 - 0}{10 - 0} \\ &= \frac{-2}{10} \\ &= \frac{-1}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n^2 + 5n - 1}{10n^2 - 5} \right) = \frac{-1}{5}$

Actividad: Resuelve los siguientes límites

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + 1 \right)$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{\sqrt{n^2+1}}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n + 5)$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n^2+5n^3}{4n+2n^3-1}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-16}}{n+4}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^2-1}$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{\sqrt{(3n-2)^3}}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n-3)+2}{(2n+3)(n-4)}$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7n^4-3n^2-1}}{n^2-1}$



FICHA DE TRABAJO N°19					
MATEMÁTICA					
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

CASO 3: RAICES

Cuando tenemos raíces, debemos aplicar un concepto que ya hemos practicado en la ver racionalización. Veamos un ejemplo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 + n})$$

En este caso usaremos el concepto conjugado, para cambiar un poco la sucesión, multiplicando por $\frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n}}$ para aplicar las propiedades de los polinomios.

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 + n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 + n}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 + n}) \cdot (\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n})}{(\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}^2 - \sqrt{n^2 + n}^2}{(\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n^2 - n}{(n + \sqrt{n^2 + n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{(\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + n})} \right) \end{aligned}$$

Y ahora aplicamos las propiedades para los polinomios dividiendo por un monomio del mismo grado de los polinomios.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-n}{n}}{\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} \right)} \right)$$

Y aplicamos los límites.

$$= \left(\frac{-1}{(\sqrt{1} + \sqrt{1+0})} \right)$$

$$= \left(\frac{-1}{(1+1)} \right) = \frac{-1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 + n}) = \frac{-1}{2}$$

Actividad: Resuelve los siguientes límites

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{4n+1}} \right)$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n - \sqrt{n^2 + 1})$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} + n)$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - n)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5} - n)$



FICHA DE TRABAJO N°20
MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

CASO 4: LÍMITES DEL TIPO 1^∞

Si tenemos dos sucesiones de la forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{c_n} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \end{array} \right\} = 1^\infty$$

Se cumple la siguiente fórmula

$$L = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot (a_n - 1)}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n$$

Al buscar el límite de $1 - \frac{2}{3n}$ y de n por separado nos damos cuenta de que tienen la forma 1^∞ , por lo que podemos aplicar la fórmula.

$$L = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot (a_n - 1)}$$

Será conveniente encontrar solo $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot (a_n - 1)$ en primera instancia donde $c_n = n$ y $a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)$, con lo que obtenemos.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot (a_n - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{2}{3n} - 1\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(-\frac{2}{3n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Luego reemplazando tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n = e^{\frac{2}{3}}$$

Actividad: Resuelve los siguientes límites

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+5}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{2n}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+3}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{3n-2}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3n+5}{n^2}\right)^n$