



FICHA DE TRABAJO N°10					
MATEMÁTICA					
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

APLICACIÓN DE FUNCIONES

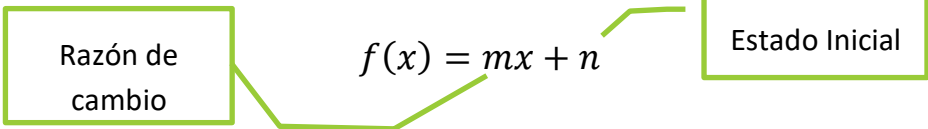
La definición actual de función no se desarrolló de manera hasta la edad moderna. Sin embargo, desde el inicio del desarrollo matemático se entendió la relación que había entre ciertos números. En la edad Moderna, Nicole Oresme se aproximó al concepto de función definiendo las leyes de la naturaleza a través de la dependencia de dos magnitudes. En la edad moderna, con la revolución científica, se trató de explicar el mundo de manera cuantificable y mediante relaciones entre magnitudes o que llevó a acercarse al concepto de función.

Hoy en día se reconoce la importancia de las ecuaciones y las funciones para definir y modelar distintos procesos que se generan en la naturaleza. Expresarlo en términos matemáticos nos permiten entenderla y pronosticar el comportamiento de estos elementos con una gran exactitud a través del tiempo.

Por lo tanto, es importante aplicar el concepto de función para entender su utilidad, y valorar su estudio.

FUNCIÓN LINEAL

Uno de los procesos más sencillos. Expresa una relación entre un estado inicial, y una razón de cambio pudiendo entenderla de la siguiente manera.



Pensemos en un problema del tipo M.R.U. (movimiento rectilíneo uniforme). En este tipo de situaciones tenemos un objeto moviéndose a velocidad constante (razón de cambio) y en línea recta.

Ej: Un vehículo que está a 4 km del punto de partida se mueve en línea recta a una velocidad de 90 Km/h ¿A qué distancia de punto de partida se encontrará después de 1,5 horas?

Primero es importante tener claro las magnitudes con las que estamos trabajando. Podemos ver que son, tiempo, distancia, y velocidad. Sin embargo, en el caso la velocidad sabemos que es una razón entre distancia y tiempo, por lo que finalmente solo estamos hablando de velocidad y tiempo.

A continuación, determinamos la dependencia de variables ¿EL tiempo cambia según la distancia? ¿O es al revés? Claramente la distancia depende del tiempo, así que la distancia es la variable dependiente $d(t)$, mientras que el tiempo es la variable independiente (t).

El estado inicial lo podemos obtener del mismo problema que muestra que el vehículo ya está a 4 km del punto de partida, mientras que la razón de cambio es la velocidad. Ahora que tenemos claro las variables es el momento de modelar la situación mediante una función.

$$d(t) = 90t + 4$$

Esta función nos permite resolver el problema que nos pedía encontrar la distancia después de 1,5 horas. Reemplazamos en la función y obtenemos,

$$d(1,5) = 90(1,5) + 4$$

La ser dos magnitudes, debemos siempre tener presente el sistema de medidas utilizadas así la escala. El problema cambiaría mucho si en vez de buscar la distancia después de 1,5 horas, buscáramos lo ocurrido después de 90 minutos. Aunque en la práctica es lo mismo, no podríamos aplicar directamente en la función, pues obtendríamos valores incorrectos. Primero debemos cambiar todo a horas o cambiar todo a minutos para obtener resultados consistentes (En general, es más práctico cambiar a una escala menor que aun mayor).

Actividad: Modela funciones para las funciones para los siguientes problemas y resuélvelos.

- 1) Un Vehículo se mueve a 30 m/s. ¿A qué distancia desde el punto de inicio se encontrará después de 32 minutos?
- 2) Un estanque que tiene 100 litros en su interior es llenado por una bomba que bombea un ritmo de 3 litros por segundo ¿Cuántos litros tendrá después de 5 minutos?
- 3) Los costos fijos de una empresa son de \$400.000, mientras que por cada hora que esta funciona se gastan \$ 50.000. ¿Cuál será el costo de funcionamiento en 6 días con jornadas de 8 horas?
- 4) La batería de un celular se carga de manera constante. Si poseía un 20% y se carga a un ritmo de 3% por minuto. ¿Cuál será la carga del celular después de media hora?
- 5) Un vehículo carga 52 litros de combustible. Si su rendimiento es de 15km/l cuantos litros de combustible quedarán después de recorrer 270 km?

FICHA DE TRABAJO N°10

MATEMÁTICA

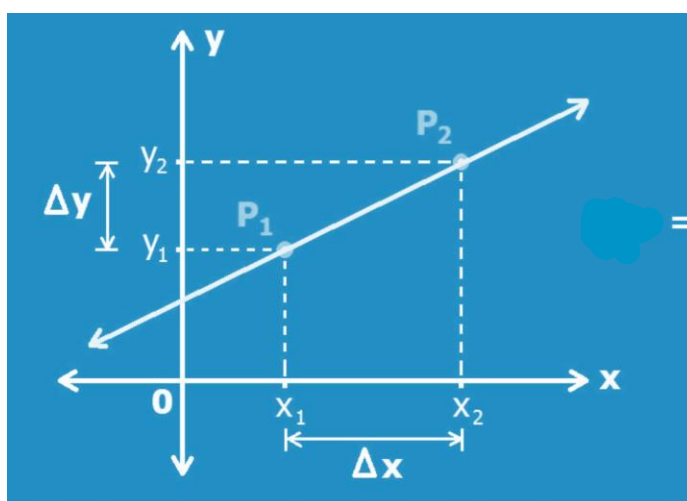
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

COMO CALCULAR LA RAZÓN DE CAMBIO

En algunos casos no tendremos todos los datos para saber la razón de cambio, sin embargo, es posible obtenerla a partir de la ecuación de la recta. Recordemos que para obtener la pendiente de ecuación de la recta que pasa por dos puntos podemos usar la siguiente fórmula.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde Δy representa la diferencia en los valores de y mientras que Δx es la variación de la variable x



Además, teniendo la pendiente m y un punto (x_1, y_1) podemos encontrar la función a partir de la fórmula.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ej: Se observa el movimiento de un cuerpo que tiene un MRU. A los 5 seg. se encuentra a 20 metros de distancia, mientras que 20 seg. está a una distancia de 32 metros ¿A qué distancia se encontrará en el minuto 4?

Modelemos la función aquí resultante observando nuevamente la relación de dependencia que tiene la distancia en metros del tiempo en segundos teniendo los siguientes pares de datos (20,5) y (32,20). Aplicamos la fórmula.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{20 - 5}{32 - 5} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

Por lo tanto, tenemos la razón de cambio es $\frac{5}{9} m/s$ (notar que esta corresponde a la velocidad. Al sacar la pendiente en este tipo de ejercicios estamos obteniendo la fórmula de velocidad $\frac{D}{T}$)

Ya que tenemos la pendiente podemos obtener la función a partir de la fórmula pendiente punto, pudiendo usar cualquiera de los dos puntos.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos.

$$y - 5 = \frac{5}{9}(x - 20)$$
$$y = \frac{5}{9}x + \frac{5}{9} \cdot 20 + 5$$
$$y = \frac{5x}{9} + \frac{100}{9} + 5$$
$$y = \frac{5x}{9} + \frac{100 + 45}{9}$$
$$y = \frac{5x}{9} + \frac{145}{9}$$

Ahora podemos escribirla como función y obtenemos:

$$d(t) = \frac{5t}{9} + \frac{145}{9}$$

Ahora podemos responder la pregunta. Nos pide el minuto 4, pero como trabajamos con metros y segundos, debemos convertirlo a segundos, lo que nos da 240 segundos.

$$d(240) = \frac{5 \cdot 240}{9} + \frac{145}{9}$$
$$d(t) = \frac{1200}{9} + \frac{145}{9} = \frac{1345}{9}$$

Por lo tanto, estará a una distancia de $\frac{1345}{9}$ metros que es aproximadamente 149,4 metros.



Actividad: Encuentra la función que modela los siguientes problemas y responde las preguntas.

- 1) Un sistema informático transfiere información a una unidad de almacenamiento. Si el disco ya tenía escritos 700 Mb al empezar la transferencia y después de 20 segundos el total de información fue de 1700 Mb. Determina la tasa de transferencia de información en segundos.
- 2) Se sabe que para una nota al obtener un 60% de logro el estudiante obtiene un 4 y al obtener un 100% de logro obtiene un 7. Que nota tendrá si obtiene un 75% de logro en una evaluación.
- 3) Un vehículo debe recorrer desde ciudad A pasando por ciudad B hasta ciudad C. Si mantuvo una velocidad de 40 k/h desde la ciudad B hasta la ciudad C y el tiempo que le tomo al vehículo fue de 90 Minutos. Determina la distancia entre ciudad B y ciudad C.
- 4) Se sabe que el movimiento de un objeto es del tipo M.R.U. Si en 4 minutos estaba a una distancia de 300 m y a los 8 minutos estaba a una distancia de 250 m ¿Cuál será la distancia del objeto en 15 minutos?
- 5) La forma en la que sube la temperatura un objeto es lineal. Si a los 6 seg el objeto está a 40° mientras que a los 15 seg. el objeto está a 60° ¿Cuál será su temperatura después de 30 seg?
- 6) Un objeto con M.R.U. que se mueve a 6 m/s alcanza los 500 m de distancia desde el punto de origen ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a este punto?



FICHA DE TRABAJO N°11

MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

FUNCION ESCALONADA

Algunos ejercicios pueden estar modelados mediante una función lineal, pero al ver el contexto podemos entender que se trata de una función escalonada.

Ej: En un estacionamiento se cobra \$300 pesos por la primera media hora o inferior, mientras que por cada 10 minutos extras de cobran \$150 pesos.

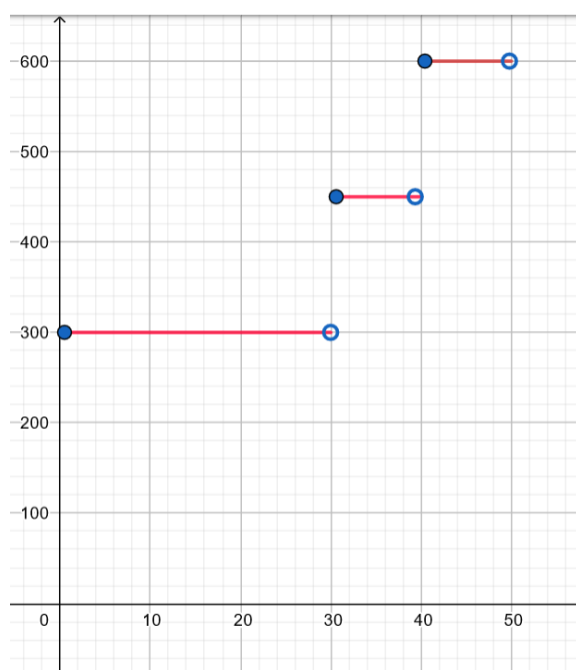
Si tratamos de modelar esta función podríamos escribirla mediante una función lineal.

$$c(t) = 300 + 150t$$

Sin embargo, nos podemos encontrar con algunas diferencias. Por ejemplo, pensemos en una persona que estuvo en el estacionamiento 10 minutos. Según la función colocada anteriormente la persona debería pagar \$1800, pero según nos decía el problema la primera media hora solo pagaban \$300. Entonces ¿Como podemos escribir este tipo de funciones? La solución es escribirla por intervalos.

$$c(t) = \begin{cases} 300 & \text{si } 0 \leq t < 30 \\ 450 & \text{si } 30 \leq t < 40 \\ 600 & \text{si } 40 \leq t < 50 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Si graficamos la función obtenemos lo siguiente.



Actividad: Contesta las siguientes preguntas

- 1) En un estacionamiento cobran \$600 pesos los primeros 30 minutos y \$25 cada minuto adicional. Si una persona necesita estacionar su auto por 8 horas ¿Cuánto pagará después de 2 días?
- 2) Un taxi cobra \$350 pesos de cuota mínima y \$250 por cada 200 metros ¿Cuánto deberá pagar una persona que se trasladó por una distancia de 2,5 kilómetros?
- 3) En un plan de llamadas se cobra \$5 por cada llamada y \$20 por cada minuto completado que dura la llamada. Si se está a en una llamada por 25 min. ¿Cuánto será el costo de la llamada?
- 4) La compañía de electricidad cobra un costo fijo del servicio por \$800 mensuales más el arriendo de un segundo medidor por \$400 mensual. Si esta cobra \$20 por cada KWh consumido. ¿Cuánto pagará una familia que consumió 250,4 kW?



FICHA DE TRABAJO N°12

MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Funciones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una de las funciones que más hemos estudiado es la función cuadrática. Puesto que la grafica es una parábola, permite un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.).

M.R.U.A.

Un objeto que acelera a una velocidad constante se puede modelar el espacio recorrido en función del tiempo con la siguiente fórmula

$$e(t) = a \frac{t^2}{2} + vt + e_0$$

Donde a es la aceleración en m/s^2 , v la velocidad inicial y e_0 la posición inicial. Es este tipo de movimientos la velocidad no es constante, pues cambia con respecto a la aceleración que va ganado el objeto.

CAIDA LIBRE

La caída libre es un caso particular de M.R.U.A., pues en este caso se conoce la aceleración de gravedad en la tierra que es de $9,8 m/s$. Si embargo se puede determinar también la velocidad de caída en otros cuerpos celestes cambiando el valor de la aceleración de gravedad.

De esta manera la formula seria la siguiente:

$$h(t) = -g \frac{t^2}{2} + vt + h_0$$

Es importante notar las diferencias las similitudes entre cada una de las fórmulas y lo interesante que g esté con un negativo. En este caso muestra un caso en la que la altura terminara disminuyendo por la concavidad de la función.

Para resolver ambas ecuaciones puede ser útil recordar la fórmula para encontrar las raíces para las funciones de este tipo usando la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y la fórmula de vértice

$$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

Otra opción es remplazar el valor obtenido de x en la función con lo que tenemos:

$$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Actividad:

- 1) En una carrera un vehículo detenido acelera a 2 m/s^2 desde la línea de meta. ¿Cuál es la distancia recorrida después de 9 segundos?
- 2) Una sonda en el espacio se mueve a 300 m/s a 1500 km de la tierra. Si en su momento debe desacelerar a un ritmo de 3 m/s^2 para acercarse a un cuerpo celeste. ¿a qué distancia de la tierra estará después de 1 minuto y medio?
- 3) Un vehículo en reposo inicia su trayecto con una aceleración de 4 m/s^2 . ¿Cuánto tiempo le tomó alcanzar los 100 metros de distancia?
- 4) Un objeto es lanzado hacia arriba de 50 m/s desde una altura de 2 metros. Determina la altura del objeto a los 7 segundos.
- 5) En marte el robot Ingenuity voló a una altura de 3 metros. Si la aceleración de gravedad en marte es de $3,7 \text{ m/s}^2$ A que altura estaría en un segundo si se dejara caer desde esa altura?
- 6) Si un vehiculo va a 120 km/h , una persona puede demorarse hasta 1 seg. en reaccionar ¿Cuántos metros recorrerá el vehículo antes de iniciar el frenado?
- 7) Si el mismo vehículo frena a 48 m/s^2 de desaceleración ¿Qué distancia recorrerá a los 2,5 segundos de iniciado el frenado?



FICHA DE TRABAJO N°13

MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa	TIEMPO	135 minutos
CONTENIDO	Sucesiones			CURSO	Electivo Mat.
OA	Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.				
Habilidades	Resolver problemas, Modelar				
Instrucciones Generales.	Lee con atención la siguiente guía y responde las actividades planteadas.				

SUCESIONES

Se define una sucesión como una función de la siguiente forma $f(n) \rightarrow a_n$ con $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir que su dominio son todos los números naturales, mientras que el codominio son los reales.

Se suele usar la notación $\{a_n\}$ para denotar el conjunto de imágenes de la función. El valor de n corresponde a la posición que tiene el término en la sucesión.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Ejemplo: Una de las sucesiones más conocidas es la sucesión de fibonacci.

$$\{a_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Este es un tipo de sucesión recursiva, es decir, el siguiente número depende los números anteriores. Para estas sucesiones repasaremos 2 tipos de sucesiones: sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas.

SUCESION ARITMÉTICAS

La definición de una sucesión aritmética es aquella que se puede escribir de la forma.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$\{a_n\} = a_1, a_1 + d, a_1 + 2 \cdot d, \dots, a_1 + (n - 1)d$$

Esto quiere decir que entre cada uno de los elementos existe una distancia constante entre los valores.

Ejemplo: Encuentra el término n -ésimo de la siguiente sucesión.

$$\{a_n\} = 6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

Para encontrar el valor n -ésimo, $a_1 + nd$ necesitamos encontrar el valor de a_1 y el valor de d .

El valor de a_1 es inmediato, basta con ver el primer término de la sucesión. En nuestro caso $a_1 = 6$

Luego buscamos el valor de d para esto basta con que restemos uno de los términos con el anterior. De esta manera podemos tener la siguiente fórmula.

$$a_n - a_{n-1} = d$$

Por ejemplo, podemos calcular $a_3 - a_2$ obtenemos lo siguiente:

$$12 - 9 = 3$$

Por lo tanto $d = 3$

Luego el término n -ésimo de la sucesión se puede escribir.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 3$$

Resolvemos

$$a_n = 6 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n + 3$$

Por lo tanto, el término n -ésimo o la regla que aplica a la sucesión es $a_n = 3n + 3$

Es útil probar que el término calculado es el correcto reemplazando por un valor conocido. Por ejemplo:

Sabemos que $a_4 = 15$ por lo que podemos comprobar el resultado obtenido.

$$a_n = 3n + 3$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 3$$

$$a_4 = 12 + 3$$

$$a_4 = 15$$

Que coincide con el valor obtenido.

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Una sucesión geométrica es una sucesión en que cada término está dado por una razón entre los términos. Se puede escribir de la forma.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$\{a_n\} = a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2, \dots, a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo: Encuentra el término n-ésimo de la siguiente sucesión.

$$\{a_n\} = 4, 12, 48, 144, \dots$$

Para encontrar el término $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ podemos ver que necesitamos encontrar el valor de a_1 y el valor de la razón r .

Como en el caso anterior a_1 es inmediato y nos damos cuenta de que vale $a_1 = 4$. Para encontrar el valor de r podemos dividir entre los dos valores.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

De esta manera aplicando la formula podemos encontrar r

$$r = \frac{48}{12}$$

$$r = 3$$

Por lo tanto, podemos decir que el término n-ésimo de la sucesión se puede escribir de la forma



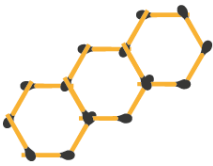
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

Y podemos comprobar los resultados de la misma manera que en el ejercicio anterior.

Actividad1: Las siguientes figuras fueron construidas con palos de fósforos. Complete cada celdilla y encuentra el término n-esimo

Número de la figura	Figura	Cantidad de palos de fósforos usados	Regla de formación según los palos de fósforos utilizados
1		3	1 + 2
2		5	1 + 2 + 2
3		7	
4			

Número de la figura	Figura	Cantidad de palos de fósforos usados	Regla de formación según los palos de fósforos utilizados
1		6	$1 + 5$
2		11	$1 + 5 + 5$
3		16	
4			

Actividad 2 : Completa los términos intermedios en las siguientes sucesiones. Determina si es aritmética, geométrica y encuentra su término general

- 4, __, 12, __, 20, 24, ...
- 9, __, -1, __, -11, -16, ...
- 15, __, 60, 120, ...
- 3, __, 12, __, 48, 96, ...
- 4, __, -36, __, -324, - 972, ...
- 96, __, 24, __, 6, 3, ...

Actividad 3: Encuentra el octavo, noveno y décimo termino de las siguientes sucesiones.

- 3, 5, 7, 9, 11, ...
- 31, 28, 25, 22, ...
- 162, 54, 18, 6, ...
- 7, 14, 28, 56, ...