

## FICHA DE TRABAJO N°9

### MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa / Sumativa	TIEMPO	90 minutos
CONTENIDO	Números complejos			CURSO	3° MEDIO
OA	Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.				
Habilidades	Resolver problemas				
Instrucciones Generales.	Lee la guía con atención y realiza las actividades planteadas				

## NÚMEROS IMAGINARIOS

Se define el número  $i$  como  $i = \sqrt{-1}$ . Con esta definición es posible definir todas las raíces negativas, pues pueden escribirse usando esta notación. Por ejemplo, si se tiene  $\sqrt{-5}$  se puede escribir como  $i\sqrt{5}$  pues:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-1 \cdot 5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = i\sqrt{5}$$

Como podemos ver la idea del número imaginario se basa en las operaciones de los números reales que ya conocemos. Por lo tanto, podemos aplicar toda la matemática de los números reales en los números imaginarios, y posteriormente en los complejos.

## POTENCIAS DE UN NUMERO COMPLEJO

Ya sabemos que  $i = \sqrt{-1}$  ¿Cuál será el valor de  $i^2$ ,  $i^3$  e  $i^4$ ?

$$i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot -1 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

Al resolver los ejercicios nos podemos dar cuenta que tenemos una regularidad

Por lo tanto, podemos definir la siguiente propiedad:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

### ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:

-**Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.

-**Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.

Proponer soluciones a problemas comunes.

-**Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

$$i^{4n+3} = -i$$

**Actividad: Determina el valor de:**

1)  $i^5 =$

2)  $i^6 =$

3)  $-i^{23} =$

4)  $-i^{45} =$

5)  $i^{384} =$

6)  $i^{1389} =$

7)  $-i^{234} \cdot i^{321} =$

8)  $i^{93} + i^{52}$

**ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:**

**-Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.

**-Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.

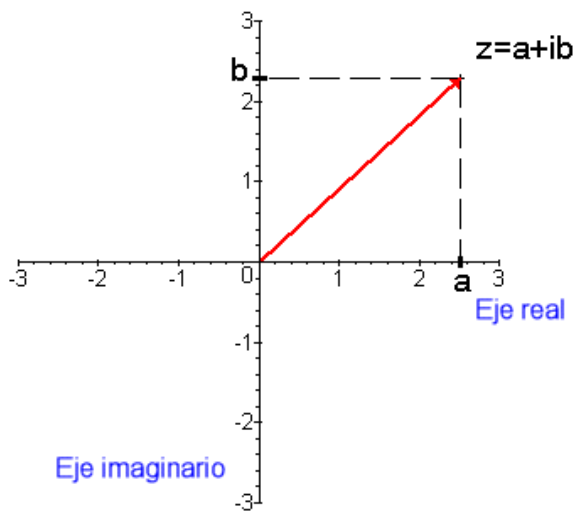
Proponer soluciones a problemas comunes.

**-Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

FICHA DE TRABAJO N°10					
MATEMÁTICA					
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Sincrónico/Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa / Sumativa	TIEMPO	90 minutos
CONTENIDO	Números complejos			CURSO	3° MEDIO
OA	Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.				
Habilidades	Resolver problemas				
Instrucciones Generales.	Lee la guía con atención y realiza las actividades planteadas				

## NÚMEROS COMPLEJOS E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Anteriormente dibujábamos  $\mathbb{R}$  usando una recta numérica horizontal. Si lo pensamos, un número imaginario no puede ser ubicado en la recta numérica pues no queda espacio. Pero si incluimos una recta perpendicular a esta obtenemos un plano (no es el mismo plano en  $\mathbb{R}^2$  con el que hemos trabajado, pero comparten muchas similitudes) Por lo tanto obtenemos el plano complejo



En eje horizontal tenemos los números reales y en el eje vertical tenemos los números imaginarios. Cualquier punto en el plano se puede escribir de la forma  $z = a + bi$  con  $a$  representa la parte real y  $b$  representa la parte imaginaria.

Por lo tanto, un número complejo se define su forma binómica como:

$$z = a + bi$$

Donde  $Re(z) = a$  e  $Im(z) = b$  (parte real de  $z$  es  $a$  y parte imaginaria de  $z$  es  $b$ )

Ejemplo:

**ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:**

- Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.
- Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.  
Proponer soluciones a problemas comunes.
- Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

$$z = 3 + 5i \text{ donde } Re(z) = 3 \text{ e } Im(z) = 5$$

$$u = 7 - 4i \text{ donde } Re(u) = 7 \text{ e } Im(u) = -4$$

$$w = -\frac{5}{3} - \sqrt{7}i \text{ donde } Re(w) = -\frac{5}{3} \text{ e } Im(w) = -\sqrt{7}$$

Como podemos ver podemos escribir el numero complejo como un par ordenado, donde el primer término representa la ubicación en el eje real y el segundo en el eje imaginario.

Ejemplo:

Forma Binómica	Par ordenado
$z = -3 + 4i$	$(-3,4)$

Actividad: Realiza la actividad 2, 3 y 4 de la pág. 87 de tu libro de Matemática

ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:

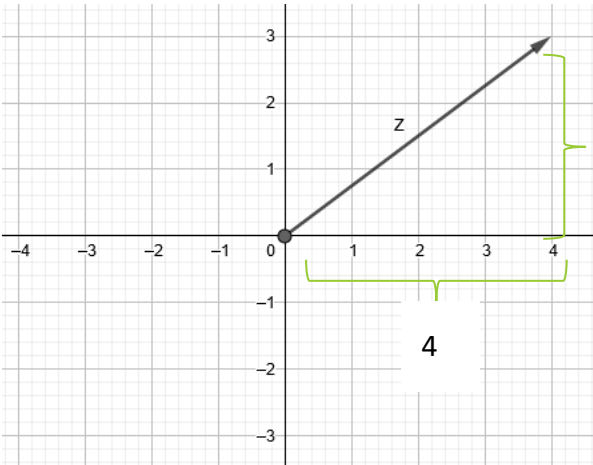
- Graduación de nivel de complejidad: Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.
- Adaptación metodológica: Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.  
Proponer soluciones a problemas comunes.
- Temporalización: Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

FICHA DE TRABAJO N°11					
MATEMÁTICA					
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Sincrónico/Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa / Sumativa	TIEMPO	90 minutos
CONTENIDO	Números complejos			CURSO	3° MEDIO
OA	Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.				
Habilidades	Resolver problemas				
Instrucciones Generales.	Lee la guía con atención y realiza las actividades planteadas				

## MODULO Y CONJUGADO DE UN COMPLEJO

Al mirar el gráfico de un número complejo podemos darnos cuenta de que parece un vector. Aunque en estricto rigor no es así, podemos recordar que un vector poseía un módulo o representaba la intensidad de una fuerza que se aplicaba a un objeto. En este caso hablaremos del módulo del complejo cuando consideremos la distancia desde el origen hasta este número en el plano.

Veamos qué pasa con el número complejo  $z = 4 + 3i$



Podemos construir un triángulo rectángulo con este número complejo para calcular la longitud del número complejo. así utilizamos Pitágoras para calcular el módulo. En este caso.

$$z^2 = 4^2 + 3^2$$

$$z = \sqrt{16 + 9}$$

$$z = \sqrt{25} = 5$$

Entonces en es te caso el valor del módulo es 5 y se escribe  $|z| = 5$

En general el módulo de un complejo  $z = a + bi$  se puede calcular de la forma.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En cambio, el conjugado representa la reflexión del número en la recta real, es decir que se cambia el valor de la parte imaginaria por su inversa aditiva.

Ejemplo:  $z = 4 + 3i \Leftrightarrow \bar{z} = 4 - 3i$

En palabras simples se cambia el signo de la parte imaginaria. Notar que para representar el conjugado se coloca una barra sobre el complejo

$$w = -7 - 9i \Leftrightarrow \bar{w} = -7 + 9i$$

**Actividad:** Demuestra que el módulo de un número complejo es igual al de su conjugado

**Realiza las actividades 3, 5 y 6 de la pág. 89 y 90 de tu libro de Matemática**

**ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:**

- Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.
- Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.  
Proponer soluciones a problemas comunes.
- Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

## FICHA DE TRABAJO N°12

### MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Sincrónico/Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa / Sumativa	TIEMPO	90 minutos
CONTENIDO	Números complejos			CURSO	3° MEDIO
OA	Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.				
Habilidades	Resolver problemas				
Instrucciones Generales.	Lee la guía con atención y realiza las actividades planteadas				

## SUMA Y RESTA

Aquí podemos comparar un número complejo a un vector. Cuando sumábamos y restábamos vectores simplemente hacíamos la operación término a término, es decir que el primer término se opera con el primero y el segundo con el segundo. Matemáticamente podemos explicarlo de la siguiente manera:

Si  $z = a + bi$  y  $u = c + di$ , entonces  $z + u = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ .

De manera análoga si se escriben como par ordenados obtenemos que

Si  $z = (a, b)$  y  $u = (c, d)$  entonces  $z + u = (a + c, b + d)$

**Ejemplo 1 SUMA:**

$$z = 3 - 5i \quad y \quad u = -6 + 8i$$

$$z + u = (3 - 6) + (-5 + 8)i$$

$$z + u = -3 + 3i$$

En el caso de la resta se debe operar de la misma manera, pero debemos recordar que el signo negativo del segundo término invertirá los signos del número complejo (Si  $z = a + bi$  entonces  $-z = -a - bi$ )

**Ejemplo 2 RESTA:**

$$z = 5 - 2i \quad y \quad u = -7 + 6i$$

$$z - u = (5 - 2i) - (-7 + 6i)$$

$$z - u = (5 - 2i) + (7 - 6i)$$

$$z - u = (5 + 7) + (-2 - 6)i$$

$$z - u = 12 - 8i$$

**Actividad: Realiza las actividades de la pág. 44 y 43 de tu cuadernillo de actividades**

#### ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:

-**Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.

-**Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.

Proponer soluciones a problemas comunes.

-**Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

FICHA DE TRABAJO N°13					
MATEMÁTICA					
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Sincrónico/Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa / Sumativa	TIEMPO	90 minutos
CONTENIDO	Números complejos			CURSO	3° MEDIO
OA	Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.				
Habilidades	Resolver problemas				
Instrucciones Generales.	Lee la guía con atención y realiza las actividades planteadas				

## MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

En el caso de la multiplicación, podemos aplicar las propiedades de una multiplicación de binomios.

Sea  $z = a + bi$  y  $u = c + di$ , entonces

$$\begin{aligned}
 z \cdot u &= (a + bi) \cdot (c + di) \\
 &= a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di \\
 &= a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)i + b \cdot d \cdot i^2 \\
 &= (a \cdot c) + (a \cdot d + b \cdot c)i - b \cdot d \\
 &= (a \cdot c - bd) + (a \cdot d + b \cdot c)i
 \end{aligned}$$

En resumen, decimos que

$$z \cdot u = (a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - bd) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Usemos los mismos números que el ejemplo anterior.

Ejemplo 3:

$$z = 3 - 5i \quad \text{y} \quad u = -6 + 8i$$

$$\begin{aligned}
 z \cdot u &= (3 - 5i)(-6 + 8i) = (3 \cdot -6 - -5 \cdot 8) + (3 \cdot 8 + 5 \cdot -6)i = (-18 + 40) + (24 + 30)i \\
 &= 22 + 54i
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4:

$$z = 5 - 2i \quad \text{y} \quad u = -7 + 6i$$

### ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:

- Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.
- Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.  
Proponer soluciones a problemas comunes.
- Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.



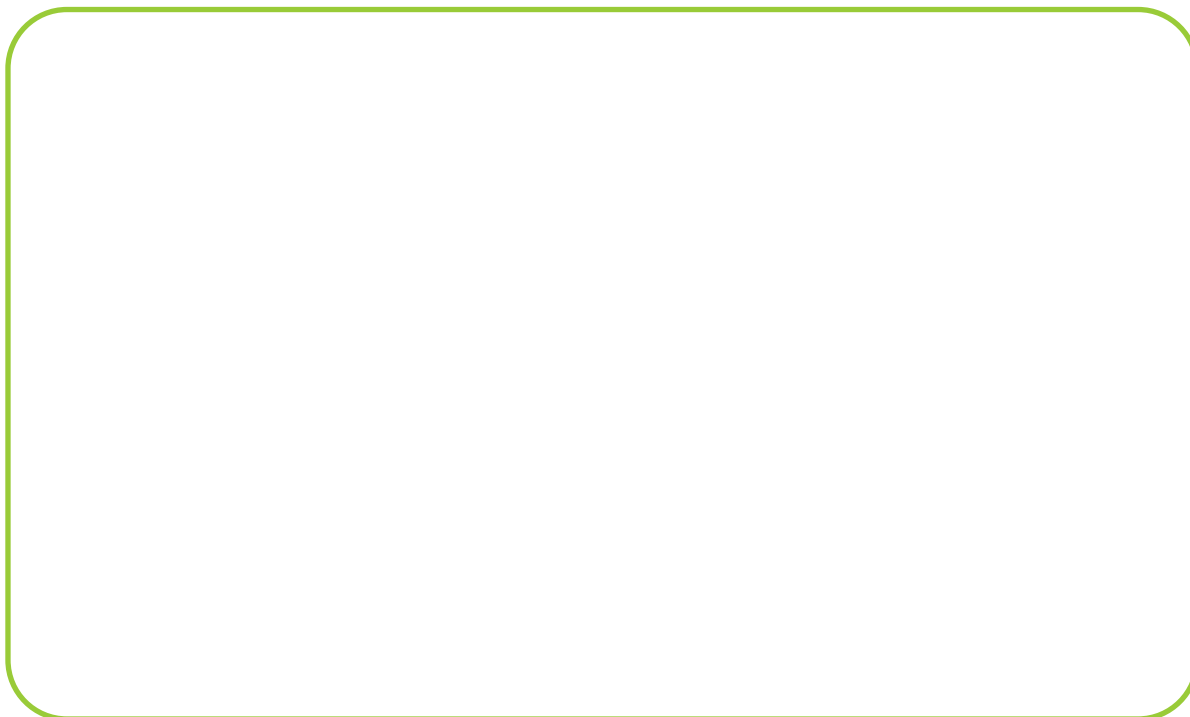
$$z \cdot u = (5 - 2i) \cdot (-7 + 6i) = (5 \cdot -7 - -2 \cdot 6) + (5 \cdot 6 + -2 \cdot -7)i = (-35 + 12) + (30 + 14)i \\ = -23 + 44i$$

## PONDERACIÓN DE NUMEROS COMPLEJOS

Una ponderación se define como una multiplicación de un número real por uno complejo

Sea  $\lambda$  un número real y  $z$  un número complejo, entonces  $\lambda \cdot z = \lambda a + \lambda bi$

**Actividad1: Demuestra la propiedad anterior usando la multiplicación de números complejos**



**Actividad2: Realiza las actividades de la página 45 y 46 de tu cuadernillo**

### ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:

- Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.
- Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.  
Proponer soluciones a problemas comunes.
- Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

FICHA DE TRABAJO N°14					
MATEMÁTICA					
NOMBRE ALUMNO/A				FECHA	
MODALIDAD	Sincrónico/Asincrónico	EVALUACIÓN	Formativa / Sumativa	TIEMPO	90 minutos
CONTENIDO	Números complejos			CURSO	3° MEDIO
OA	Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.				
Habilidades	Resolver problemas				
Instrucciones Generales.	Lee la guía con atención y realiza las actividades planteadas				

## DIVISIÓN DE UN NUMERO COMPLEJO

Para dividir un número complejo utilizaremos el conjugado del denominador. De esta manera podremos escribir el resultado de la forma  $a + bi$ .

Procedimiento

Sea  $u = a + bi$  y  $v = c + di$ , entonces:

$$u : v = \frac{u}{v} = \frac{a + bi}{c + di}$$

Amplificaremos la fracción por el conjugado del denominador.

$$\frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{a \cdot c + b \cdot d + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo:

Sean  $u = 5 + 3i$  y  $v = -2 + 3i$

$$u : v = \frac{u}{v} = \frac{5 + 3i}{-2 + 3i} = \frac{(5 + 3i) \cdot (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i)} = \frac{5 \cdot -2 + 3 \cdot -3 + (3 \cdot -2 - 5 \cdot -3)i}{(-2)^2 + (-3)^2}$$

$$\frac{-10 - 9 + (-6 + 15)i}{4 + 9} = \frac{-19 + 9i}{13} = \frac{-19}{13} + \frac{9i}{13}$$

Por lo tanto:  $u : v = \frac{-19}{13} + \frac{9i}{13}$

### ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:

-**Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.

-**Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.

Proponer soluciones a problemas comunes.

-**Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.

**Actividad: Resuelve las actividades de la página 47 de tu cuadernillo de actividades.**

**Actividad: Resuelve las actividades las actividades de la página 103 de tu libro a excepción de la actividad 4, 7 y 8**

**ESTRATEGIAS DE ADECUACIÓN PROGRAMA DE INTEGRACIÓN ESCOLAR:**

- Graduación de nivel de complejidad:** Simplificar el nivel de exigencia de los aprendizajes esperados.
- Adaptación metodológica:** Relacionar contenidos con experiencias de la vida diaria.  
Proponer soluciones a problemas comunes.
- Temporalización:** Adaptar el tiempo dedicado a cada actividad.